1. Trayectorias ortogonales

Sea $\Phi(x, y, C) = 0$ una familia uniparamétrica de curvas que no se cortan. A veces es posible obtener una ecuación diferencial cuya resolución genera la familia de curvas dada. Para ello, hay que derivar implícitamente respecto a x y, usando la ecuación original, eliminiar el parámetro C (no siempre se dan condiciones para poder eliminar C). Así, se obtiene la ecuación diferencial buscada:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0 \\ \Phi(x, y, C) = 0 \end{cases} \Rightarrow F(x, y, y') = 0$$

El problema de las trayectorias ortogonales trata de hallar otra familia uniparamétrica de curvas $\Psi(x, y, C) = 0$ de tal forma que en cada punto de intersección de dos curvas de ambas familias, la recta tangente de la primera curva en el punto de corte sea perpendicular u ortogonal a la recta tangente de la segunda curva.

Si la ecuación diferencial asociada a la familia original, $F(x, y, y') = 0$, se escribe en la forma explícita $y' = f(x, y)$, entonces la pendiente de la recta tangente en (x, y) es $f(x, y)$ y la pendiente de la recta ortogonal en (x, y) es $\frac{-1}{f(x,y)}$. Luego para encontrar las trayectorias ortogonales hay que resolver la ecuación diferencial

$$y' = \frac{-1}{f(x, y)}$$

Ejemplo 1.1. Sea $x^2 + y^2 = 2cx$. Hallar la ecuación deferencial asociada:

$$\begin{cases} 2x + 2yy' = 2c \\ x^2 + y^2 = 2cx \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x(x + yy') \Rightarrow y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

La ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

Se trata de una ecuación homogénea: $y' = \frac{2y/x}{1-(y/x)^2}$. Con el cambio $z = y/x$ se transforma en

$$z + xz' = \frac{2z}{1 - z^2} \Rightarrow xz' = \frac{z(1 + z^2)}{1 - z^2} \Rightarrow \int \frac{(1 - z^2)}{z(1 + z^2)} dz = \int \frac{1}{x} dx + C$$

Integrando

$$\int (\frac{1}{z} + \frac{-2z}{1 + z^2}) dz = \ln |x| + C \Rightarrow \ln |z| - \ln(z^2 + 1) = \ln |x| + C \Rightarrow \frac{z}{z^2 + 1} = Cx,\ C \neq 0$$

Deshaciendo el cambio

$$\frac{y}{y^2 + x^2} = C \Rightarrow y^2 + x^2 = ky, \quad k \neq 0$$

y junto con la solución de equilibrio ($z = 0$):

$$\begin{cases} y^2 + x^2 = ky, \quad k \neq 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Las trayectorias ortogonales a la familia de círculos centrados en el eje x es una familia de círculos centrados en el eje y y la recta $y = 0$.

Podemos representar con Sage las dos familias de curvas ortogonales:

```
x,y,c=var('x,y,c')
f= x^2+ y^2==2*c*x
P=Graphics()
for i in srange(-3,4,1):
    P+=implicit_plot(f(c=i), (x,-8,8), (y,-6,6))
g=x^2+ y^2==c*y
Q= Graphics()
for i in srange(-4,5,1):
   Q+=implicit_plot(g(c=i), (x,-8,8), (y,-6,6),  color="red")
(P+Q).show()
```